Mathematik 2 für Informatik Drmota (113.060)

Vektorfeld (Seite 260)

1. $\frac{\partial f1}{\partial y} = \frac{\partial f2}{\partial x}$ Integrabilitätsbedingung: wenn erfüllt, existiert Stammfunktion. Beides in Angabe, die in etwas so aussieht $\left(\frac{\text{Ausdruck1}}{\text{Ausdruck2}}\right)$ und $\left(\frac{\text{Ausdruck3}}{\text{Ausdruck2}}\right)$, jeweils in die Form $\left(\frac{\text{Ausdruck1}}{\text{Ausdruck2}}\right)'_{Variable\ aus\ Ausdruck1, meistens\ x_2}$ und $\left(\frac{\text{Ausdruck3}}{\text{Ausdruck2}}\right)'_{Variable\ aus\ Ausdruck3, meistens\ x_1}$ bringen, ableiten und wenn beide Ergebnisse gleich sind, ist somit die Bedingung erfüllt. Ab und zu sind statt Brüchen normale Ausdrücke gegeben. Dann muss man einfach mit denen rechnen, der Ablauf ist aber gleich wie mit Brüchen! In einigen Fällen ist auch statt x_1 und x_2 x und y gegeben. Dabei ist der Ablauf ebenfalls derselbe, nur dass man statt x_1 x verwendet und statt x_2 y verwendet.
2. c(Variable) ausrechnen indem man zuerst den ersten Teil der Angabe integriert (nach dx_1), danach ableitet (nach dx_2), (nicht auf c$(\text{Variable})'$ vergessen immer „mitzunehmen“, da wir ja genau das ausrechnen wollen und man sehr leicht darauf vergisst!) und = Angabe zweiten Teil setzen. Dann sollte viel wegfallen und c(Variable) bleibt über, welches man sich jetzt ausrechnen kann.
3. Nun kann man Ergebnis aus Ableitung ersten Teil der Angabe (siehe 2.) anschreiben mit dem „berechneten“ c.
4. Kurvenintegral: einsetzen, wobei erster Wert von a x ist, zweiter y, bei b erste ebenfalls x, zweite y. Ergebnis aus 3 wird zu Ergebnis aus 3 mit eingesetztem x und y Wert von b minus Ergebnis aus 3 mit eingesetztem x und y Wert von a. $\int_c u(x) = F\big(c(b)\big) - F(c(a))$

Integral bestimmen

In Formelsammlung schauen wie genau die Formel aussieht die man braucht. Meistens kommt etwas in der Art $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$. Man muss dann nur $\ln|f(x)|$ rechnen mit eingesetzten b für das x, danach - $\ln|f(x)|$ mit eingesetzten a für das x, also $[\ln|f(x) mit\ b|] - [\ln|f(x) mit\ a|]$.

Bestimmung der Rekursion

1. Angabe in richtige Form bringen: Steht beim ersten Ausdruck ein Wert davor, muss man die gesamte Angabe durch diesen dividieren sodass man anschließend vor dem ersten Ausdruck keinen Wert mehr hat, dafür dann Ausdruck 2 und 3 durch den Wert dividiert erhält.
2. a und b bestimmen: a ist Wert des zweiten Ausdruckes, b der Wert des dritten Ausdruckes. Werte können auch negativ sein!
3. Homogener Teil: λ 1 und 2 ausrechnen indem man a und b in die Große Formel, also $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$ einsetzt. λ_1 ist der größere Wert (-a +Wurzel), λ_2 der kleinere (-a -Wurzel)
4. Fallunterscheidung: a und b von zuvor (Punkt 2) einsetzen und schauen was heraus kommt:
    a. $a^2 - 4b > 0$ => $x_n^{(h)} = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$

   b. $a^2 - 4b < 0 \Rightarrow x_n^{(h)} = r^n(D_1 cos * n * \varphi + D_2 sin * n * \varphi)$
   c. $a^2 - 4b = 0 \Rightarrow x_n^{(h)} = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_1^n \Rightarrow x_n = (C_1 + C_2 n)\lambda_1^n$
5. Einsetzen der Lösung für λ 1 und 2 aus 3. in Fallunterscheidung aus 4.
6. Partikuläre Lösung: Störfunktion $S_n^{(P)}$ = rechte Seite der Angabe.
   a. Wenn Zahl alleine ist: Versuchslösung mit A_0
   b. Wenn r^n: Versuchslösung mit Ar^n
   c. Wenn sin (rn) oder cos (rn): A sin(rn) + B cos (rn)
   d. Wenn Zahl*n+ Zahl: Versuchslösung mit An + B ($2a_{n-2}$ wird zu $2A_{n-2} - 2B$)
7. Ausrechnen der Partikulären Lösung: Bei Fall a von 6 würde man einfach die Werte in der Angabe zusammenzählen (Wert vor dem ersten Ausdruck, b (Wert 2) und c (Wert 3) von Punkt 2 oben) und = rechte Seite setzen. Man erhält nach ausrechnen etwas in der Form $A_0 = Wert$. Im Falle von d. bei Punkt 6 kann man alles wegfallen lassen, wo kein n drinnen steht (Koeffizientenvergleich). Somit kann man sich A ausrechnen. Danach den Wert für A einsetzen=> man kann sich B ausrechnen.
8. Einsetzen von h (homogener Teil) und p (partikulär, also das was bei A_0heraus kommt) in $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$
9. C_1 vom homogenen Teil fehlt noch. Wir rechnen uns C_1aus indem wir aus der Angabe den Wert für $a_0 = x_n$ setzen und für n=0 nehmen. In Fall c bei 4. sollte dadurch C_2 wegfallen und man kann sich C_1 ausrechnen. Ansonsten C_1 ausrechnen, dann in C_2 das errechnete für C_1 einsetzen und C_2 ausrechnen. Danach kann man das Ergebnis in C_1 einsetzen und dieses ausrechnen.
10. C_2 vom homogenen Teil fehlt noch. Wir setzen nun ebenfalls, nur mit a_1 statt a_0, aus der Angabe den Wert für $a_1 = x_n$ und rechnen mit n=1. Da wir zuvor bei 9. C_1 berechneten, können wir diesen Wert nun auch einsetzen und C_2ausrechnen. Nun können wir vollständig „einsetzen" und erhalten unseren $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$.

Differentialgleichung (Seite 289 (eher ab 293 relevant))

1. $\frac{dy}{dx}$ = Angabe umformen bis man den x Teil der Angabe mit dx auf einer Seite hat, und auf der anderen Seite den y Teil der Angabe mit dy stehen hat.
2. In Form bringen das es wie folgt aussieht „x bzw. y Teil der Angabe" * dx bzw. dy
3. Integral bilden: ∫ „y Teil der Angabe" * dy = ∫ „x Teil der Angabe" * dx wobei x und y, somit dann auch dx und dy vertauscht sein können!
4. Integral ausrechnen.
5. Entlogarithmieren.
6. In die Form bringen das y auf einer Seite steht, also y = „Rest" von Punkt 5.

Doppelintegral bei Dreieck bestimmen

1. $y(x) = m * x + t$
2. m ausrechnen: $m = \frac{Unterschranke\ y - Oberschranke\ y}{Unterschranke\ x - Oberschranke\ x}$
3. t ausrechnen: t = „Schnittpunkte" von Tangente (von der langen Dreieckskante/ Seite) auf y an der Stelle $x = 0$.

4. In die Formel von 1. die errechneten Werte von 2 und 3 einsetzen (also m und t, x ist unbekannt!). Nun kann man sich $y(x)$ ausrechnen für 5.
5. $\int_{Unterschranke\ x}^{Oberschranke\ x}\left(\int_{Ergebnis\ von\ y(x)}^{Oberschranke\ y} "Angabe\ ohne\ dx"\right) dx$ bilden.
6. Integrieren (z.B. aus x*y wird $x * \frac{y^2}{2}$) und $\Big|_{Ergebnis\ von\ y(x)}^{Oberschranke\ y}$ dx
7. $\int_{Unterschranke\ x}^{Oberschranke\ x}(Ergebnis\ aus\ 6.mit\ eingesetzten\ Oberschranke\ y\ für\ y) -$ $Ergebnis\ aus\ 6.mit\ eingesetzten\ Ergebnis\ von\ y(x)\ für\ y$
8. Ausrechnen von 7. Sollte dann die Form $\int_{Unterschranke\ x}^{Oberschranke\ x}(Ausdruck1) - (Ausdruck2)$
9. Integrieren von 7. $(Ausdruck1\ integriert) - (Ausdruck2\ integriert)\ \Big|_{Unterschranke\ x}^{Oberschranke\ x}$
10. Wie 7. also (Ergebnis 9. mit x = Oberschranke x) - (Ergebnis 9. mit x = Unterschranke x)
11. Nun hat man nur mehr Zahlen in der Rechnung. Einfach ausrechen und das Beispiel ist fertig.

Lagrang'sche Multiplikation (Seite 247)

1. Angabe in Form $F(x, y) + \lambda(Nebenbedingung)$ anschreiben und ausrechnen. Aufpassen bei der Nebenbedingung, da man die rechte Seite der Nebenbedingung nach links bringen muss (da man nur die anschreibt). Man hat also bei der Nebenbedingung dann „linke Seite“ – „rechte Seite“ stehen!
2. Ableiten von Ergebnis aus 1. nach x, y, λ:
   a. Φ x = Alles anschreiben (ohne x) wo x enthalten ist. Falls etwas x^2 ist, 2x anschreiben. Wenn es $Wert\ x^2$ ist, (Wert*2)x.
   b. Φ y: wie a. nur mit y
   c. Φ λ: wie a bzw. b. nur mit λ
3. λ eliminieren aus Φ x und Φ y: Φ x und darunter Φ y anschreiben, schauen wie viel λ es jeweils bei den beiden Zeilen gibt, und so multiplizieren das es gleich viele sind.
4. Nun Zeile 1 und Zeile 2 (aus 3.) subtrahieren, also Werte der Zeile 1 – Werte der Zeile 2. Falls ein Wert in Zeile 2 also negativ ist, ändert sich durch das – das Vorzeichen und man „addiert“ Wert Zeile 1 und Wert Zeile 2. Dadurch das man bei 3. Zeile 1 und Zeile 2 auf gleiche Anzahl λ gebracht hat, fallen in diesem Schritt die λ weg und man hat nur mehr x und y. Somit kann man sich ausrechnen wie x zu y steht (z.B. x = y).
5. x und y in die Nebenbedingung einsetzen: Aus Schritt 4 setzt man in die Nebenbedingung (Angabe) für y den Wert ein (also wie viele x ein y entspricht), wodurch man nur mehr x und Zahlen in der Rechnung hat. Somit kann man x ausrechnen.
6. Wie 5. Man kann aber gleich das Ergebnis für x aus 5 nehmen, hat nur y und Zahlen in der Rechnung, und kann somit einfach y ausrechnen.
7. Prüfen auf min. oder max.: schauen welchen Wert f_{xx} hat, also bei Φ x (Punkt 2) welcher Wert bei x steht.
   a. Ist der Wert > 0: Minimum gefunden.
   b. Ist der Wert < 0: Maximum gefunden.

8. Prüfen ob Extremum existiert: In die Formel $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ die Werte eintragen, z.B. für f_{yy} was bei Φ y vor dem y steht. Danach ausrechnen $(f_{xx} * f_{yx}) - (f_{yy} * f_{xy})$. Ist das Ergebnis größer 0, liegt ein Extremum vor. Ergebnis anschreiben in Form („x Wert aus 5.“, „y Wert aus 6.“)

Man untersuche, ob die Differentialgleichung exakt ist

1. Erster Teil der Angabe (bis nach dx) ist Px. Zweiter Teil der Angabe (das was nach dx ist bis nach dy) ist Py.
2. Exaktheit der Integritätsbedingung prüfen: $\frac{\partial f1}{\partial y} = \frac{\partial f2}{\partial x}$. In unserem Fall $\frac{(Px)'}{\partial y} = \frac{(Py)'}{\partial x}$
3. Punkt zuvor mit Px ausrechnen und korrekt anschreiben, also $\frac{Px}{\partial y} = (\text{„Px ausgeschrieben“})'_{\mathrm{y}}$ und dann ableiten nach y. Bleiben also nur die Ausdrücke stehen wo 1y darin vorkommt und da alles anschreiben außer y!
4. Nun das gleich nur mit y, also $\frac{Py}{\partial y} = (\text{„Py ausgeschrieben“})'_{\mathrm{x}}$ und nach x integrieren. Wenn wo z.B. $3x^2$ steht wird daraus dann 6x.
5. Wenn Ergebnis aus 4. und 5. Gleich sind, ist die Integritätsbedingung positiv, Exaktheit ist gegeben und es gibt somit eine Stammfunktion.
6. $\int Px\ dx = \int (\text{"Px ausgeschrieben"})\ dx$ anschreiben und dann ausrechnen. +c(y) nicht vergessen!
7. $(„Ergebnis\ aus\ 6“)'_y = Py$ anschreiben. Dann linke Seite ausrechnen und rechte Seite einsetzen. Danach fällt einiges weg.
8. Man sollte nun etwas in der Form $c(y)'\mathrm{y} = \text{Ausdruck}$ haben. Damit wir auf der linken Seite c(y) haben, müssen wir auf der rechten Seite integrieren.
9. Nun können wir alles anschreiben, was in etwa so aussehen sollte:
$F(x, y) = \text{"Ergebnis Punkt 6 mit eingesetztem c(y) aus Punkt 8"} + c$

Theorie

Was ist der Gradient einer Funktion *f* mit $\boldsymbol{f(x) = (x_1, \dots, x_n)}$?

f muss eine total differenzierbare Funktion sein.

$$f \mapsto grad\ \ f = \begin{pmatrix} f_{x1} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{xn} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

Gegeben ist ein Skalarfeld $f(x_1,x_2,x_3)$: $\mathrm{P}^3 \rightarrow \mathrm{P}$. Aus derartigen Skalarfeldern kann ein Vektorfeld generiert werden:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} : P^3 \rightarrow P^3$$

Die Ableitung ist nun:

$$f \mapsto grad\ f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

Unter welcher Voraussetzung ist das Vektorfeld u(x)= $\begin{pmatrix} u_1(x) \\ . \\ .u_{n(x)} \end{pmatrix}$ **= grad (f(x))**

Defintion:

Gilt grad F = $\vec{f}$ (für ein Skalarfeld F und ein Vektorfeld $\vec{f}$), dann heißt $\vec{f}$ Gradientenfeld und F Stammfunktion (oder unbestimmtes Integral) von $\vec{f}$.

Satz (Integrabilitätsbedingung):

Ein Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ besitzt (unter gewissen Voraussetzungen) genau dann eine Stammfunktion F mit grad $F = \vec{f}$, wenn die Integritätsbedingungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\ \forall\ i, j = 1, \dots, n\ mit\ i\ \neq j$ erfüllt sind.

Was kann dann über das Kurvenintegral $\int u(x)\ dx$ ausgesagt werden?

Ein Kurvenintegral ist genau dann wegunabhängig wenn die Funktion ein Gradientenfeld ist. Dann gilt

$$\int f(x)dx = F(c(b)) - F(c(a))$$

Wenn wir also eine Stammfunktion F finden, so dass der Gradient dieser Stammfunktion gleich unserer Funktion ist, dann ist das Kurvenintegral wegunabhängig.

Bei diesem Beispiel:

$\begin{pmatrix} e^{-x} \\ \cos(y) \\ z^5 \end{pmatrix} = grad(-e^{-x} + \sin(y) + \frac{z^6}{5})$ wobei $\begin{pmatrix} e^{-x} \\ \cos(y) \\ z^5 \end{pmatrix}$ f und $(-e^{-x} + \sin(y) + \frac{z^6}{5})$ F ist.

Damit ist gezeigt, dass f ein Gradientenfeld ist und das heißt wiederum, dass das Kurvenintegral wegunabhängig ist.

„Wie lautet die unendliche Taylorreihenentwicklung für eine Funktion *f(x)* an einer Anschlussstelle xo ?“ bzw. „Wie lautet die Taylorreihenentwicklung einer unendlich oft differenzierbaren Funktion *f(x)* mit Anschlussstelle xo ?“

$$f(x) \sim f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Entwickeln sie das Taylorpolynom 2. Grades für eine Funktion *f(x,y))* mit Anschlussstelle (x_o, y_0).

$$f(x_0+h, y_0+k) = \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k}_{lineare\ Approximation\ (Ebene)} +$$

$$\underbrace{\frac{1}{2!}\ f_{xx}h^2 + 2 f_{xy}hk + f_{yy}k^2}_{\substack{quadratische\ Approximation \\ (Ellipsoid,\ Paraboloid,...)}}\ + ... + \mathrm{Re}\, stglied$$

Beispiel:

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Gesucht ist die quadratische Approximation im Entwicklungspunkt (0,1)

$$\begin{array}{ll} f = x^2 + y^2 & f(0,1) = 1 \\ f_x = 2x & f_x(0,1) = 0 \\ f_y = 2y & f_y(0,1) = 2 \\ f_{xx} = 2 & f_{xx}(0,1) = 2 \\ f_{xy} = f_{yx} = 0 & f_{xy}(0,1) = 0 \\ f_{yy} = 2 & f_{yy}(0,1) = 2 \end{array}$$

$$x = x_0 + h => h = x - x_0$$
$$y = y_0 + k => k = y - y_0$$

$$f(x,y) = 1 + 0*(x-x_0) + 2(y-y_0) + \frac{1}{2!}\ 2(x-x_0)^2 + 2*0*(x-x_0)(y-y_0) + 2(y-y_0)^2\ =$$
$$1 + 2(y-1) + x^2 + (y-1)^2\ (+...)$$

„Welche Verfahren zur Nullstellenbestimmung kennen Sie. Erklären sie diese und erläutern sie, welche Bedingungen jeweils für *f(x)* gelten müssen." bzw. „Welche numerischen Verfahren zur näherungsweisen Berechnung einer Nullstelle einer stetigen bzw. differenzierbaren Funktion f(x) kennen Sie? Beschreiben Sie auch diese Verfahren. Welche Voraussetzungen muss f(x) jeweils erfüllen?

Newtonsches Näherungsverfahren, Konvergenzordnung, Regula falsi, Beispiel, geometrische Interpretation.

Newtonsches Näherungsverfahren

Iterationsverfahren zur Lösung von $f(x) = 0$, Die Grundlegende Idee dieses Verfahren ist, die Funktion in einem Ausgangspunkt zu linearisieren, daher ihre Tangente zu bestimmen, und die Nullstelle der Tangente als verbessere Näherung der Nullstelle der Funktion zu verwenden. Die erhaltene Näherung dient als Ausgangspunkt für einen weiteren Verbesserungsschritt.

Nachteil: Man braucht eine differenzierbare Funktion $f(x)$. Newton- Verfahren konvergiert nur, wenn:

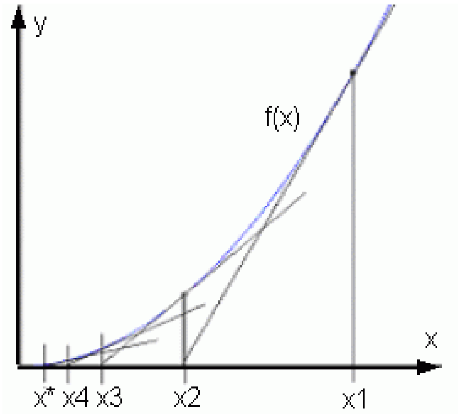
$f'(x) <> 0\ auf\ Intervall\ I$

f(x) zwei Mal stetig differenzierbar

f'(x) ≠ 0

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \geq 0$$

Geometrische Interpretation:



Konvergenzordnung: p = 2

Regula falsi

„Regel des falschen Ansatzes". Iterationsverfahren zur Lösung von $f(x) = 0$.

Das Regula- falsi- Verfahren startet mit zwei Stellen (in der Nähe der Nullstelle) a_0 und b_0, deren Funktionsauswertungen $f(a_0)$, $f(b_0)$ unterschiedliches Vorzeichen haben. In dem Intervall [a,b] befindet sich somit nach dem Zwischenwertsatz (für stetiges f) eine Nullstelle. Nun verkleinert man in mehreren Iterationsschritten das Intervall und bekommt so eine immer genauere Näherung für die Nullsteel. f muss stetig sein, aber nicht notwendigerweise differenzierbar.

df/dx wird durch den Differenzenquotienten ersetzt:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

=> $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} * f(x_n)$ für n = 1, 2, 3,… //Standardform

Was ist die erzeugende Funktion einer Folge $\langle a_n \rangle_{n\geq 0}$?

Wir betrachten die Folge $\langle a_n \rangle = a_0, a_1, a_2, \ldots$ und ordnen ihr die Reihe $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ zu. Die Potenzreihe A(z) wird erzeugende Funktion der Folge $\langle a_n \rangle$ genannt. Potenzreihe in z, ist eine „erzeugende Funktion“. Erzeugende Funktionen verwendet man in der Kombinatorik und in der Lösung von Differenzengleichungen.

Kurvenintegral (Kurve c:[a,b]->R^n) Quelle

Kurvenintegral 1. Art:

Das Wegintegral einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

entlang eines stückweise stetig differenzierbaren Weges $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

ist definiert als

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s := \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\dot{\gamma}(t)\|_2 \, \mathrm{d}t.$$

Kurvenintegral 2. Art:

Analog dazu berechnet sich das Wegintegral über ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

mit einer ebenfalls so parametrisierten Kurve so:

$$\int_\gamma \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} := \int_a^b \langle \mathbf{f}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, \mathrm{d}t.$$

Wenn wegunabhängig und Stammfunktion existiert:

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Wie berechnet man die Bogenlänge einer Kurve $c: [0,1] \to R^2$? Wie lautet die Gleichung der Tangente einer Kurve, die durch die Gleichung F(x, y)=C gegeben ist, um Punkt (x_0, x_1)?

Eine Kurve c:[0,1]->R^2 (Allgemein c:[a,b]->R^n) ist von endlicher Länge (rektifizierbar), wenn die Längen von Polygonzügen gegen einen Grenzwert konvergieren und falls die Feinheit f(z) gegen 0 konvergiert. Die Länge der Kurve ist dann durch $L = \lim_{F(Z) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \| c(t_i) - c(t_{i-1}) \|$ gegeben und wird Bogenlänge genannt.

f (z): Feinheit der Zerlegung: $L = \int_a^b \sqrt{c_1'(t)^2 + \ldots + c_n'(t)^2\, dt}$

@ Gleichung der Tangente einer Kurve,.. $\mathrm{y} - \mathrm{y_0} = \mathrm{f}'(\mathrm{x_0})(\mathrm{x} - \mathrm{x_0}), \mathrm{x} \in \mathbb{R}$

Anmerkung: Wikipedia sagt: „Ist die gegebene Kurve der Graph einer reellen Funktion ***f***, so ist die Tangente ***t*** im Punkt ***P(x₀ | f(x₀))*** die Gerade, die dort die gleiche Steigung hat wie die Kurve. Die Steigung der Tangenten ***t*** ist also gleich der ersten Ableitung von ***f*** an der Stelle ***x₀***, ***f' (x₀)***. Die Gleichung der Tangenten ***t*** ist somit:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Die Tangente entspricht der besten linearen Näherung für die Funktion *f* an der Stelle x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ für } x \approx x_0\text{“}$$

Wie lautet der Hauptsatz über implizite Funktionen (für Funktionen F(x,y)) ?

Hauptsatz über implizite Funktionen:

Sei $F: D \rightarrow IR$ stetig differenzierbar Funktion. Außerdem $F(x_0, y_0) = 0$ und $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ für ein $(x_0, y_0) \in D$. Dann ist (in einer Umgebung U von (x_0, y_0)) durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ in U eine eindeutige, stetige Lösung $y(x)$ gegeben. Die Funktion $y(x)$ ist außerdem stetig differenzierbar und erfüllt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_x}{F_y}$$

$$y'(x) = \frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

Beispiel:

$$\mathrm{F(x,y)} = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y} - 1 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{1} = -2x$$

Man beschreibe die Ansatzmethode zur Lösung von <u>homogenen linearen Differentialgleichungen</u> mit konstanten Koeffizienten zweiter Ordnung: $y'' + ay' + by = 0$. Welche 3 Lösungsfälle müssen unterschieden werden?

Lösung mittels Ansatz $y = e^{\lambda x}$ somit ergibt sich das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + a_{n-2}\lambda^{(n-2)} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

$P(\lambda)$ setzt man nun gegen 0. Aus den Nullstellen des Polynoms lassen sich Teillösungen bilden, aus dessen Linearkombination sich die Lösung der Differentialgleichung ergibt.

- Reelle Nullstellen: λ_1, λ_2 und $\lambda_1 \neq \lambda_2$ => $C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{x}} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 \mathrm{x}}$
- Komplexes Nullstellenpaar: $\lambda_k = a + bi$, $\lambda_{k-1} = a - bi$ der Vielfachheit r_k
  - $e^{ax} \cos bx$, $xe^{ax} \cos bx$,…, $x^{r-1} e^{ax} \cos bx$
  - $e^{ax} \sin bx$, $xe^{ax} \sin$,…, $x^{r-1} e^{ax} \sin bx$

- Reelle Nullstellen: $\lambda_1 = \lambda_2$ => $(C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}$

Wann heißt eine Ableitung f (von Rn nach Rm) an x0 differenzierbar?

Eine Funktion f:D->R heißt differenzierbar im Punkt xo, falls der Grenzwert existiert, dieser wird dann die Ableitung von f an der Stelle xo genannt f'(xo). Falls f für alle x E d differenzierbar ist, so heißt die Funktion f'(x) die Ableitung von f.

„Wann heißt f stetig differenzierbar an x0?"

Ist auch die Ableitung von f eine stetige Funktion, dann nennt man sie "**stetig differenzierbar**".

Wie berechnet man die Elemente der Funktionalmatrix? (Jacobi-Matrix)

Die Jacobi-Matrix (benannt nach Carl Gustav Jacob Jacobi; auch Funktionalmatrix oder Ableitungsmatrix genannt) einer differenzierbaren Funktion ist die -Matrix sämtlicher erster partieller Ableitungen. Genutzt wird sie z. B. in der näherungsweisen Berechnung/Approximation oder Minimierung mehrdimensionaler Funktionen in der Mathematik.

Die Jacobi-Matrix bildet die Matrix-Darstellung der ersten Ableitung der Funktion f.

Definition der Funktionalmatrix einer mehrdimensionalen Funktion $f: R^n \rightarrow R^m$, daher

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_i) \\ \dots \\ f_m(x_i) \end{pmatrix}$$

$$J_f = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{z}_1} & \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{z}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{z}_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathrm{f}_m}{\partial \mathrm{z}_1} & \frac{\partial \mathrm{f}_m}{\partial \mathrm{z}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathrm{f}_m}{\partial \mathrm{z}_n} \end{bmatrix} \right)$$

„Sei $f: R^n \rightarrow R^m$ an der Stelle x_0 differenzierbar. Wie ist die Funktionalmatrix von f an der Stelle x_0 definiert? Sei weiters $g: R^m \rightarrow R'$ an der Stelle $y_0 = \mathrm{f}(x_0)$ differenzierbar. Wie lautet die Kettenregel für die Funktionalmatrix der Funktion (f ° g)(x) = f(g(x))?" bzw. „Wann heißt eine Ableitung f (von $R^n \rightarrow R^m$) an x_0 differenzierbar? Wie berechnet man die Elemente der Funktionalmatrix? Wann heißt f stetig differenzierbar an x_0?

Die Funktionalmatrix wird auch Jacobi Matrix genannt. In ihr sind sämtliche erste partielle Ableitungen enthalten. Jede (total) differenzierbare Funktion ist auch stetig.

Eine Funktion heißt im Punkt x_0 total differenzierbar, falls eine lineare Abbildung $f': R^n \rightarrow R^m$ existiert, so dass $f(x) = f(x_0) + f'(x - x_0) + R(x)$ gilt und der Rest $R(x)$ die Bedingung $\lim_{x \to x_0} \frac{\|R(X)\|}{\|x - X_0\|} = 0$ erfüllt.

Mit $R^n \rightarrow R^m$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Kettenregel f ° g:

$$\frac{\partial(f^\circ g)}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial g}\big(g(x_0)\big) * \frac{\partial g}{\partial x}(x_0)$$

Kettenregel g ° f:

$$\frac{\partial(g^\circ f)}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial f}\big(f(x_0)\big) * \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$$

Total differenzierbar

Eine Funktion heißt im Punkt x_0 total differenzierbar, falls eine lineare Abbildung $f'\colon R^n \to R^m$ existiert, so dass $f(x) = f(x_0) + f'(x - x_0) + R(x)$ gilt und der Rest $R(x)$ die Bedingung $\lim_{x \to x_0} \frac{\|R(X)\|}{\|x - X_0\|} = 0$ erfüllt.

Nützliche Informationen

Angeblicher Stoff

Integralrechnung in einer und mehreren Variablen
Diff.rechnung in mehreren Variablen
Anwendungen
Differenzen- und Differentialgleichungen
numerische Verfahren

Kapitel 5-7 (also Seite 182 bis 336) und Kapitel 9.1 bis 9.4 (Seite 388 bis 414) ohne Euler Interpolation.

Wichtige Seiten im Buch

"Fallunterscheidung": Seite 282 (eher 283 und 284)
Störfunktion: Seite 285
Integrabilitätsbedingung: Seite 261
Quotientenregel: Seite 187
Extremum: Seite 243, 245
Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung: Seite 296 (eher 297)

Gute Webseiten

Differenzieren: http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i.html
Differentialrechnung: http://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung

Quickhelp

Ableiten/ differenzieren: $f(x) := a * x^b$ => $f'(x) = a * b * x^{(b-1)}$
f nach m ableiten: f(m, n) = m + 2n² + 2 + 2n => f'1(m) = 1 + 0 + 0 + 0
f nach n ableiten: f(m, n) = m + 2n² + 2 + 2n => f'1(n) = 0 + 4n + 0 + 2
f(x)= x^2 => f'(x)=2x (differenziert)

Infos

Über die Ausarbeitung

Ich habe die Ausarbeitung so gut es geht gemacht, aber trotzdem können sich Fehler einschleichen! Falls man welche findet, bitte per E- Mail oder PM an mich weiter leiten damit ich sie ausbessere! Bei rot geschriebenen Sätzen bin ich mir nicht ganz sicher ob sie so stimmen und deswegen würde ich mich sehr über Feedback (ob es so stimmt oder nicht) freuen ☺.

Zusätzliche Informationen

Version:	0.5.5
Neuste Version:	http://stud4.tuwien.ac.at/~e0402913/uni.html
Ausarbeitung:	Martin Tintel (mtintel)